MATEMÁTICA

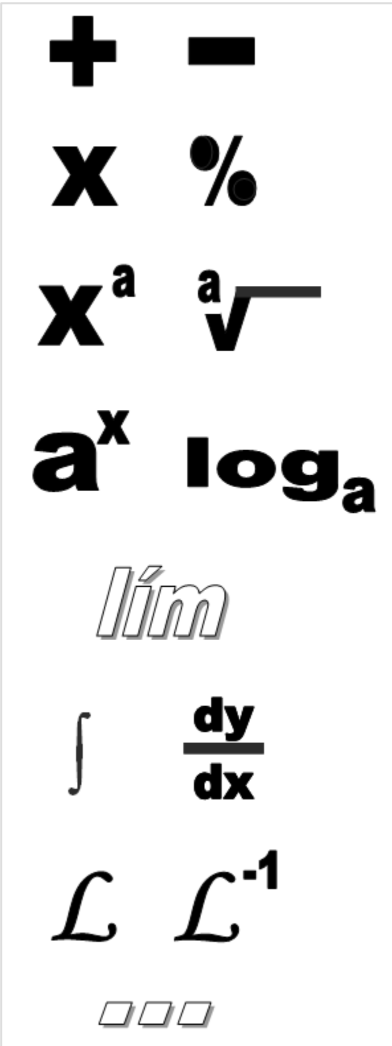
Los temas de Matemática se separarán al principio en ***álgebra*** y ***análisis matemático***. Luego, estos dos grandes conjuntos irán juntándose.

El *álgebra* se ocupa de la operaciones, los conjuntos numéricos, las matrices, etc. Además de la *geometría*, de la no nos estamos olvidando, es álgebra más o menos sencilla lo que aprendemos en el colegio primario y secundario.

El *análisis matemático* o cálculo, entra en juego cuando aparecen los infinitésimos, magnitudes como $\frac{1}{\infty}$

¿Recuerdas ese axioma de la geometría que dice "por un punto pasan infinitas rectas"? El entender que por más rectas que pongamos, nunca se llenará el espacio, siempre cabrán más y más rectas, infinitas, está muy relacionado con el concepto fundamental de infinitésimo.

Tal vez ya conozcas de análisis matemático o tal vez no. De cualquier forma haremos una pequeña inducción aprovechando los operadores algebraicos que seguro conoces:



Sumar y restar...

Multiplicar y dividir...

Potenciación y radicación...

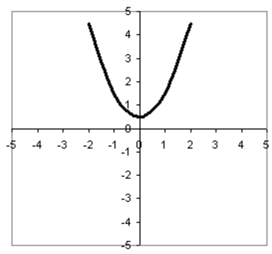
¿Cómo venimos? ¿Bien?

Exponenciación y logaritmo...

Guarda con esto. Suele ocurrir que no se maneja muy bien el logaritmo después del colegio. Y es de suma importancia para el análisis matemático. Así que asegúrate de saber resolver ecuaciones logarítmicas.

Y por fin pasamos a LÍMITE. ¿Qué es el límite? Aunque ya aprenderemos esto en los cursos de matemática, nos tomaremos la libertad de dar algunas primeras explicaciones aquí, aunque puedan a veces carecer de la precisión necesaria (buscaremos más que nada claridad, sin complicar mucho el asunto).

Calcular un límite consiste en averiguar hacia qué punto tiende una función cuando nos acercamos a algún valor de x. Por ejemplo supongamos la función polinómica $\boxed{y = x^2 + 0{,}5}$



A qué valor tenderá la función cuando x tienda a 0, por ejemplo.

Si nos fijamos, veremos que tiende a 0,5. Es más, en 0 la función vale 0,5.

Pero no es eso lo que averigua el límite, sino hacia qué punto se acerca la función. En este caso, y como los límites tendiendo a cero por derecha y por izquierda también valen 0,5, podemos asegurar que la función es continua en 0.

¿Cómo se escribe esto de *límite*, *límite por derecha* y *límite por izquierda*?

$\boxed{\lim_{x \to 0} (x^2+0,5)}$ LÍMITE

$\boxed{\lim_{x \to 0^+} (x^2+0,5)}$ LÍMITE POR DERECHA

$\boxed{\lim_{x \to 0^-} (x^2+0,5)}$ LÍMITE POR IZQUIERDA

O para escribir un poco más rápido, podemos poner así:

$$\boxed{\ell_{x \to 0} \; x^2+0,5}$$

LÍMITE

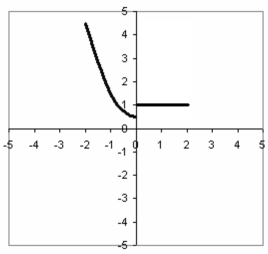
La variable x puede hacerse tender a cualquier valor, no solamente 0. Es más, podemos hacerla tender a infinito.

$$\boxed{\ell_{x \to \infty} \; x^2+0,5}$$

LÍMITE

¿Y el límite puede ser diferente al valor en el mismo punto? Pues sí. Si tuviésemos la función definida de forma paramétrica, cosa que muchas veces ocurre, podríamos por ejemplo encontrarnos con algo así:

$$\begin{cases} y = x^2 + 0,5 & \text{Si } x < 0 \\ y = 1 & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$



Y la función ya no será continua en 0.

El empleo de los límites aparece en las bases de cualquier desarrollo de análisis matemático. Además de ello se usa, por ejemplo, para calcular cuántas cajas poner en un supermercado para que los tiempos de espera sean razonablemente cortos (teoría de colas).

Cuando la función depende de más de una variable, el límite se complica un poco. Ya no tendremos límite por derecha y por izquierda, sino que el límite podrá ser distinto según por qué camino, por qué curva, nos acerquemos al valor en cuestión. Pensemos que la representación de una función de dos variables sería una superficie (ya no una línea).

Funciones de varias variables hay muchas, por ejemplo, la humedad que informa el servicio meteorológico (humedad relativa), que depende de la concentración de agua en el aire y de la temperatura...

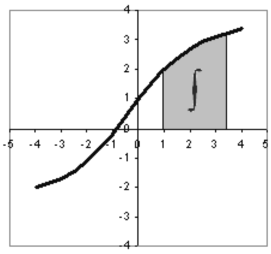
$$\text{hum.relativa} = f(\text{conc.}H_2O, \text{temp.})$$

Pero volvamos a nuestra inducción que comenzaba con "+ -". Después del límite aparecen los operadores integral y derivada.

El símbolo de la integral parece una “I” ¿no?, pero en realidad es una “S” estirada, ya que la integral es un tipo particular de **s**umatoria.

$$\int$$

Podemos pensar a la integral tal como nació históricamente, a partir de su interpretación geométrica. Si tenemos una función f(x) y la integramos entre dos puntos, el resultado obtenido será el valor numérico del área contenida entra la curva de función y el eje de abscisas.



Este tipo de integral se llama “integral definida” y se escribe así (para el caso del ejemplo):

$$\int_{1}^{3,5} f(x)\, dx$$

Se lee “integral entre uno y tres coma cinco de efe de equis, diferencial de equis”.
El diferencial indica respecto de qué variable debemos integrar.

Otra forma de pensar la integral es como la función inversa a la derivada. Vayamos entonces a ver qué es la derivada (muy a grosso modo) y luego volvamos a la integral...

La derivada la hemos escrito como:

$$\frac{dy}{dx}$$

Se lee “derivada de y respecto de equis”, o bien “diferencial de y sobre diferencial de equis”.

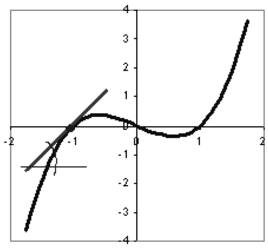
Pero también podríamos haber puesto:

Dy o bien y' o bien $f'(x)$

Que se leen “*derivada de y*”, “*y prima*” y “*efe prima de equis*”. Todas son notaciones equivalentes.

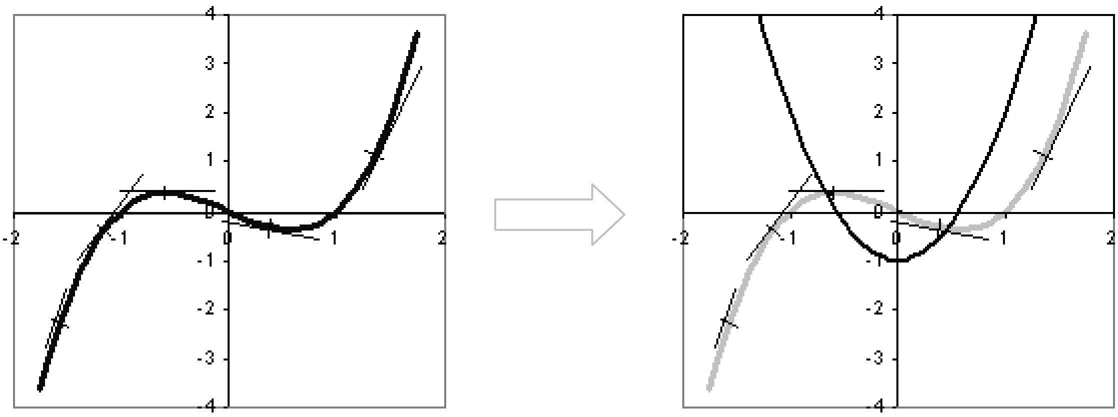
Podemos decir que la derivada indica la velocidad con que crece o decrece una curva. Para cada valor de x la derivada podrá ser diferente. Es más, normalmente la derivada de una función de x, podrá ser expresada como otra función de x.

Gráficamente, en cada punto, la derivada corresponde a la recta tangente a la curva. En realidad, al ángulo que forma esa recta con la horizontal. Es más, para ser correctos, diremos que a lo que verdaderamente corresponde, es a la tangente trigonométrica de aquel ángulo.



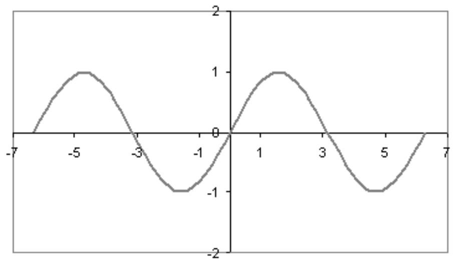
En este gráfico aparece una función del tipo $y = x^3 - x$
Se dibujó la recta tangente en el punto x = -1
La pendiente de esta recta, o sea la tangente trigonométrica del ángulo que forma con la horizontal, es la derivada en ese punto

Si hacemos el ejercicio de trazar muchas tangentes, medir sus ángulos con un transportador, calcular la *tg* de cada ángulo con la calculadora y graficar los valores encontrados, la curva que estaremos dibujando será la función derivada de la que teníamos originalmente.



Fijémonos que cuando la función va creciendo, la derivada es positiva. En cambio cuando decrece, se hace negativa. Y al ponerse horizontal, cuando ni crece, ni decrece, la derivada es cero.

Encontrando cuándo se hace cero la derivada de una función, o sea cuándo se pone horizontal la recta tangente, podremos, por ejemplo, ubicar los máximos y mínimos relativos de la función (los vértices de las lomadas para arriba y p'abajo).



En el gráfico aparece una función del tipo sen x.
Podemos ver que la derivada se hará cero en cuatro puntos: cerca de -5, cerca de -1, un poco después de 1 y un poco antes de 5.
Estos puntos más altos o más bajos son máximos y mínimos relativos, respectivamente.

En *cálculo*, se estudiará al principio cómo derivar por definición (usando el *límite*) y se irán deduciendo las distintas reglas de derivación (habrá que sabérselas de memoria; verás que igual es sencillo). Una de esas reglas dice por ejemplo que:

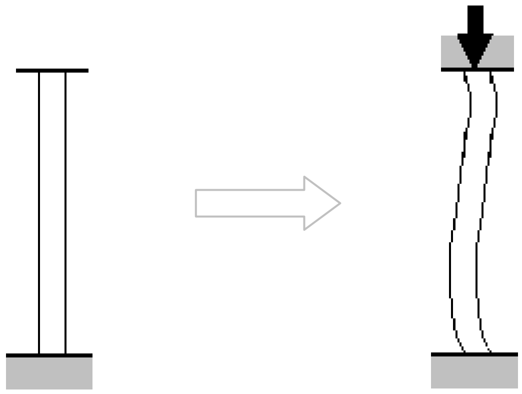
$$(x^n)' = n \,.\, x^{n-1}$$

O sea que la derivada de x^3 será $3x^2$, y la derivada de x^2 será $2x$.

Podemos derivar más de una vez a la función, con lo que tendremos la derivada segunda, tercera, etc.

$$y' \qquad y'' \qquad y'''$$

Para citar un ejemplo, la derivada cuarta se emplea en el cálculo del pandeo de columnas (estudiando cómo se dobla cuando está cargada). Si la columna se pandea visiblemente, no servirá. Y tendrá que usarse otro material más duro o alguna forma de columna más resistente, o poner más columnas para distribuir el peso.



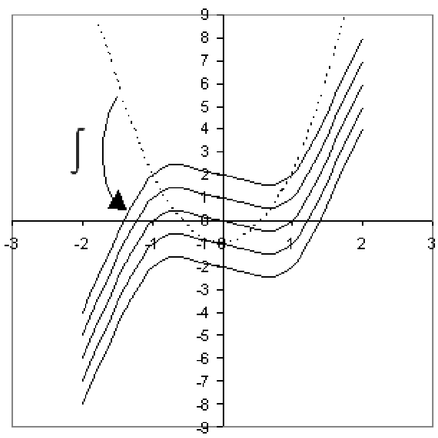
El pandeo de una columna.

Para estudiarlo se emplea la derivada cuarta.

y^{iv} o bien y''''

Cuando tenemos una derivada y queremos saber de qué función viene, para ello tenemos que integrarla. Al hacerlo, en realidad obtendremos una familia de curvas paralelas, ya que la única información que guarda la derivada es sobre "cómo varía la función en cada punto", pero no sabe nada sobre el valor absoluto de la función originaria.

Así por ejemplo tendremos:



Al integrar la función punteada $3x^2-1$, se obtiene toda una familia de funciones paralelas entre sí. En el gráfico se dibujaron cinco de ellas para ejemplificar:

$\int (3x^2-1)\,dx$ → $x^3 - x + 2$, $x^3 - x + 1$, $x^3 - x$, $x^3 - x - 1$, $x^3 - x - 2$

Como regla general se escribe: $x^3 - x + C$

En este caso, como no pusimos límites de integración, estamos frente a una integral indefinida. Se lee: *integral de tres equis cuadrado menos uno diferencial de equis*.

Las ciencias suelen emplear derivadas para escribir con ecuaciones lo que observan en la realidad. De esta forma llegamos a ecuaciones que ya no son sencillamente algebraicas, porque contienen derivadas. Se llaman "ecuaciones diferenciales". Por ejemplo:

$$y' + y + x = 4 \qquad\qquad 3y'' - sen^2x + 1 = 0$$

Para resolver las ecuaciones diferenciales, tendremos que integrar, o usar algún método aproximado si integrar se torna muy difícil. Resolver una ecuación diferencial significa averiguar cuanto vale "y" en función de equis, sin que estén por el medio la derivadas.

Planteemos ahora un sencillo problema físico con ecuaciones diferenciales. Usaremos el caso del MRUV (movimiento rectilíneo uniformemente varado). Deduciremos la ecuación que nos de la posición en función del tiempo. Nos meteremos en algunos cálculos que posiblemente no entiendas; pero valdrá la pena echar un vistazo...

$$\frac{dv}{dt} = a$$

En el MRUV lo que sabemos es que la aceleración es constante (si no, no sería "uniformemente" variado). Por otro lado sabemos que la aceleración "a" indica la variación de la velocidad con el tiempo. O sea que la aceleración, es la derivada de la velocidad respecto del tiempo. Usando la notación diferencial de derivada queda como escribimos aquí a la izquierda.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a \, . \, dt$$

Pasamos el diferencial de tiempo al miembro derecho, e integramos. Los extremos de la integral son los valores entre los que sabemos que cambia la variable de integración. En el caso de la velocidad, variará entre la velocidad inicial y una velocidad cualquiera "v". En el caso del tiempo, variará entre el instante inicial (cero) y un instante cualquiera "t".

$$v - v_0 = a \, . \, t$$

Aquí hemos resuelto la integral (ya aprenderás en matemática cómo hacerlo, en este caso fue muy sencillo). Tenemos la velocidad en función del tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Pero sabemos que la velocidad es la variación del espacio con el tiempo (km/h por ejemplo, o m/s). O sea que la velocidad, es la derivada del espacio respecto del tiempo. En notación diferencial queda como aquí a la izquierda.

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = a \, . \, t$$

Combinando las dos fórmulas anteriores, llegamos a otra ecuación diferencial, ahora con las variables "x" y "t".

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (a \, . \, t + v_0) \, . \, dt$$

Separamos variables e integramos como antes. Los extremos de integración serán ahora la posición inicial "x_0" y una posición cualquiera "x", y para el tiempo otra vez tendremos cero y t.

$$x - x_0 = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \, . \, t$$

Resolviendo la integral, llegamos por fin a la expresión de x en función de t.

$$x = x_0 + v_0 \, . \, t + \frac{1}{2} a t^2$$

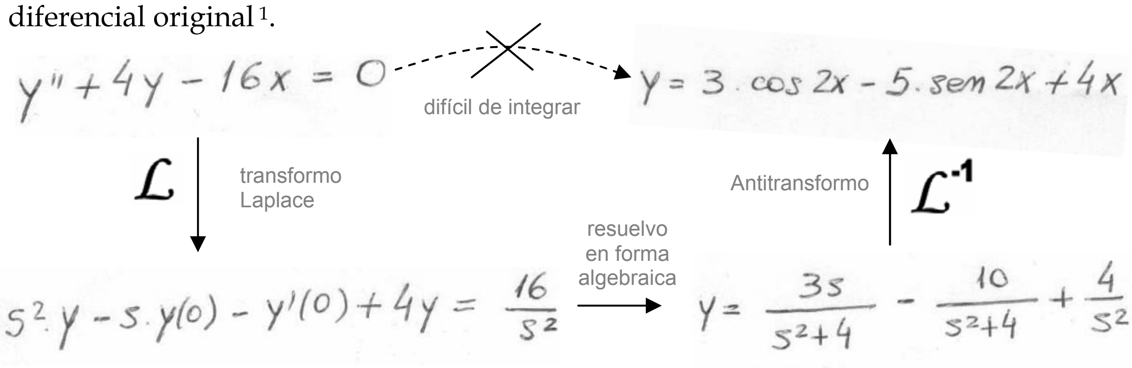
Reordenando los términos, vemos que es aquella ecuación que ya aprendimos en física del secundario, cuando vimos MRUV en cinemática.

No siempre es sencillo resolver una ecuación diferencial integrando, así que se han inventado diferentes metodologías para lograrlo, dada la enorme importancia que poseen.

Una de esas herramientas es la que sigue en la inducción: se llama *transformada de Laplace*, y el operador opuesto es la *antitransformada*.

$$\mathcal{L} \qquad \mathcal{L}^{-1}$$

Muy usada en el día a día de los Ingenieros Electrónicos para resolver circuitos, por ejemplo, esta herramienta sirve para transformar una ecuación diferencial en su equivalente algebraica, resolverla con los cálculos sencillos que aprendimos en la escuela y por último antitransformarla para obtener el resultado buscado de la ecuación diferencial original[1].



Terminamos la inducción. Los puntos suspensivos al final...

...indican que *la cosa sigue*; hay multitud de otras transformadas (como la de Fourier, para ecuaciones de ondas, etc.) y otros tipos de operadores valiosos.

Pasemos ahora directamente a revisar qué veremos de matemática en la facultad, tanto en álgebra como en análisis.

En ÁLGEBRA trabajaremos con la resolución de sistemas de ecuaciones,

$$\begin{cases} 3x + 2y - 15 = 0 \\ y - x = 6 \end{cases}$$

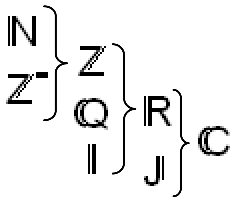
Es importante tener claro que para poder resolver un sistema de ecuaciones, necesitamos tener tantas ecuaciones como incógnitas (sumado a que las ecuaciones sean linealmente independientes unas de otras).

Trabajaremos también con matrices, muchas veces para expresar sistemas de ecuaciones de una manera más útil.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & x \\ 0 & x+3 & 2 & 2 \\ 0 & x & 12x & 3{,}5 \end{pmatrix}$$

[1] Ejemplo tomado de MURRAY S. SPIEGEL, Ecuaciones diferenciales aplicadas, Prentice Hall, 1983. Para la resolución se tomó en cuenta que y(0)=3 e y'(0)=-6.

En el ejemplo aparece una matriz extraña, que también posee variables dentro (no tiene por qué ser así). Pero en general, será útil darse cuenta que así como los conjuntos numéricos que conocemos...



Los naturales {0; 1; 2; ... } que junto con los Enteros negativos {-1; -2; ... } forman los enteros, que junto con los racionales {-0,5; 1,33...; 10; ... } y los irracionales {√2; π; e; ...} forman los reales, que junto con los imaginarios {i; -3.i; 1,23.i; ...} forman los complejos.

...también existen conjuntos con más dimensiones. Por ejemplo una matriz de dos columnas y tres filas cuyos elementos estén limitados a los números reales, pertenecerá a los reales de 2 x 3, o sea:

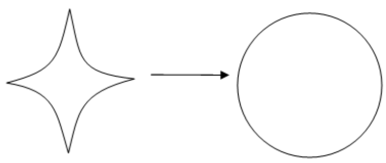
$$\mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Y también podemos pensar en matrices cúbicas, con tres dimensiones y otras no graficables como una de cuatro dimensiones, que pertenezca a:

$$\mathbb{R}^{2 \times 3 \times 3 \times 3}$$

Qué lío. Y podemos seguir agregando lo que se nos ocurra.

En álgebra también veremos *transformaciones lineales* y luego otro tipo de transformaciones más complicadas, mezclándose con análisis matemático. Por ejemplo una *transformación bilineal* (que emplea una de esas funciones que llevan una lineal en el numerador y otra en el denominador), se usó para calcular los esfuerzos soportados por el tanque de un cohete. Este tanque tiene forma estrellada, lo que hace que los sistemas de ecuaciones se compliquen por demás. Entonces mediante una transformación bilineal, se convirtió todo el modelo a un esquema de tanques cilíndricos; se resolvieron los sistemas de esfuerzos para esa forma, y luego se destransformó al esquema original.



Corte del tanque de cohete estrellado y su homólogo transformado para simplificar los cálculos matemáticos

En álgebra también se verán problemas de optimización, incluyendo las herramientas que los Ingenieros Industriales estudian en la materia *Investigación Operativa*, como la *programación lineal* y otras. Será importante, si tu carrera no pone el acento en estos temas o tal vez los pasa por alto, que te ocupes de aprenderlos, porque forman parte de las herramientas necesarias para tomar decisiones en niveles gerenciales.

En ANÁLISIS se comienza viendo *límite*, *derivada* e *integral*, aplicado a funciones de una variable independiente. Es importante ir conociendo mediante la práctica cómo son las diversas funciones, para lo que se entrará en el tema de *análisis de funciones*. Una característica de los Ingenieros es el manejo de este tema, que nos permite entender de otra forma la realidad, pudiendo modelizarla mejor, empleando nuestra capacidad analítica para disgregar las variables de las situaciones a las que nos enfrentamos.

Aprende lo mejor que puedas a derivar e integrar, incluyendo toda su base teórica. Ello te permitirá caminar con soltura en lo que sigue de la carrera. Una duda aquí, se convertirá en inmenso escollo más adelante y te hará andar en penumbras en los temas científicos y tecnológicos que te interesen.

Luego se irá usando lo aprendido para resolver algunas ecuaciones diferenciales sencillas (y no tanto).

Seguirá el ***análisis de dos y más variables***, con estudio de funciones, límite, derivadas (que ahora se llamarán derivadas parciales, ya que podrán ser respecto de una o de otra variable), integrales múltiples, etc.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \partial_x f \qquad f_x$$

DERIVADAS PARCIALES

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

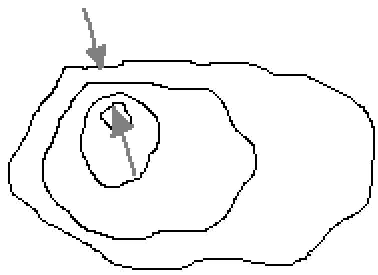
INTEGRALES MÚLTIPLES

Cabe aclarar que no necesitamos tener más de una variable para integrar varias veces. Puede aparecernos una integral doble o triple también en análisis de una variable (*y cuando ello suceda en un parcial, comenzarás a transpirar...*)

Después vendrá el ***análisis vectorial***. Se trata de un enfoque particular de estas herramientas para su uso en campos vectoriales como la interpretación del flujo de líquido por un caño, el electromagnetismo, el campo gravitatorio, etc.

Aparecerán operadores como el *rotor*, la *divergencia* y el *gradiente*. Para poner algún ejemplo, el rotor nos servirá para decidir si podremos obtener energía de determinado campo (si vale cero no podremos). Si la divergencia es positiva estaremos en presencia de una fuente (como la canilla abierta, o el material radiactivo emitiendo partículas alfa) y si la divergencia es negativa estaremos en presencia de un sumidero (como la rejilla por donde se va el agua en la pileta, o un agujero negro absorbiendo la luz que llega a sus fronteras). Y el gradiente está muy relacionado con lo que ya vimos de derivada. Por ejemplo en una carta topográfica, cuando las curvas de nivel están cercanas, el gradiente de altitud es grande y cuando están más separadas, significa que el gradiente es menor (o sea que cambia más despacio).

∇ Este es el símbolo de GRADIENTE. Se llama operador NABLA.



Ejemplo de curvas de nivel en una carta topográfica. Cada curva representa el perímetro de un corte a determinada altura (100 m, 200 m, 300 m, etc.)
Se trata de una pequeña montaña.
Donde indican las flechas, está el mayor gradiente de alturas.

$$\operatorname{div}\vec{F} \qquad \operatorname{rot}\vec{F}$$

DIVERGENCIA ROTOR

También en análisis vectorial aparecerán las *integrales de línea* y las *integrales de superficie*. Para calcular una integral de línea, en vez de movernos por el eje x, nos desplazaremos por la curva de una función. Este tipo de integrales se emplean para muchas funciones *de estado*, cuyo valor no depende del recorrido seguido sino del estado inicial y del final. Entre ellas están la energía potencial gravitatoria, el voltaje o tensión eléctrica, la entropía de un sistema químico, etc.

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

Integral de línea de la función F(x), evaluada sobre la curva C.

El círculo indica que se trata de una línea cerrada.

Las integrales de superficie sirven entre otras cosas para calcular el flujo de un campo vectorial por la superficie sobre la que se integra y para conocer la medida de dicha superficie. También se definen integrales de volumen. Al igual que las de línea, el operador llevará o no un círculo según se trate o no de una superficie o volumen cerrado.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{F}}\, d\sigma$$

INTEGRAL DE SUPERFICIE

$$\oiiint_{V} \vec{\mathbf{F}}\, d\varpi$$

INTEGRAL DE VOLUMEN

Más adelante se aprenderá ***análisis complejo***. Los números complejos aparecen en el análisis matemático, por ejemplo cuando tenemos ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Algunas aplicaciones refieren a la conducción del calor, potencial electrostático, flujo de fluidos, etc.

En el análisis complejo aparece el tema de las *transformación conforme* y de otros tipos, como los vistos para convertir el tanque estrellado de cohete en uno cilíndrico.

Luego veremos distintos métodos para resolver ***ecuaciones diferenciales a derivadas parciales***, muy importantes en los cálculos reales de ingeniería, por ejemplo para el diseño de equipos industriales.

También se estudiarán las *transformadas* ***de Laplace***, ***de Fourier*** y quizás algunas otras. En Fourier emplearemos ***series***, que ya habremos aprendido a manejar en los primeros cursos de matemática. La transformada de Fourier, por ejemplo, busca representar cualquier función periódica como la suma de los primeros términos significativos de una sucesión compuesta por infinitos senos y cosenos de distinto período.

Todos estos temas de matemática y muchos otros que no mencionamos, se aprenden en Ingeniería porque son de utilidad, tanto a la formación del razonamiento ingenieril como a las aplicaciones diarias de la carrera.

Pon el acento en matemática; el más fuerte de todos.